

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento I

Soluções da Folha Prática 1

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.

2. (c) $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^k = 2^{k-1}B$, $k \in \mathbb{N}$; (d) $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (e) Não existe B' .

3. (b) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$.

4. $ADBC = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou $BADC = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. A primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a segunda linha é $[3 \ 4]$.

6. $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq AE = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

7. i. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; iii. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$;
ii. $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$; iv. $(AB)^2 = ABAB$.

8. (a) Verdadeira; (b) Falsa; (c) Falsa.

10. i. iii. iv. Sim; ii. Fechado em relação à multiplicação escalar; v. Não.

12. $AX = C_1 - C_2 + 2C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, sendo C_i a coluna i de A .

13. (b) e (d).

i. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ii. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

14. (a) O conjunto de soluções do sistema é $\{(t, \frac{1}{3} - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(b) O conjunto de soluções do sistema é $\{(6-t, -5+t, 3, -1-t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(c) ATENÇÃO: O sistema é possível indeterminado! O conjunto de soluções é ...

15. $M = 2A - B + 3C$ e N não se escreve como combinação linear de A, B, C .

16. (a) $\alpha = -1$; (b) $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$; (c) $\alpha = 1$.

17. (a) Impossível se $\beta = 1$; possível determinado se $\beta \neq 1$ e $\beta \neq -1$; possível indeterminado de grau 1 se $\beta = -1$;
(b) $(0, 0, 0)$ é a única solução.

18. (a) i. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $b = -1$. (b) $\{(1, -y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

19. O sistema é impossível se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$; possível determinado se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ com única solução

$$\left(0, \frac{1}{\alpha - 1}, 1 - \frac{3}{\alpha}\right).$$

20. Observe que a matriz ampliada do sistema é equivalente por linhas a $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-2a \end{array} \right]$.
21. $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$; (b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$; (c) $\alpha = -2$.
22. Se C é a coluna i de A , então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$ com 1 na linha i e as restantes entradas nulas é uma solução.
23. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ não é singular e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ é singular.
24. (a) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.
25. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
26. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.
27. $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.
28. (a) é a afirmação correta.
29. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.
30. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $x = 1, y = 0, z = -1$.
33. Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $A^3 = O$, logo $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
37. (a) $B \in \mathcal{C}(A)$, pois $AX = B$ representa um sistema possível, sendo $X = (1 - 2z, 1 - 2z, z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$;
 (b) B é combinação linear das colunas de A de mais do que uma forma, pois $AX = B$ é possível indeterminado;
 (c) $\mathcal{N}(A) = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $\text{nul}(A) = 1$.
38. (a) $\text{car}([A|B]) = 3, \text{car}([A^T|C]) = 2$;
 (b) $\mathcal{N}(A) = \{(-2z + t, z - t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$;
 (c) $\text{car}(A) = 2 = \text{car}(A^T)$, contudo $\text{nul}(A) = 2 \neq \text{nul}(A^T) = 1$;
 (d) $B \notin \mathcal{C}(A)$, pois o sistema $AX = B$ é impossível; $C \in \mathcal{L}(A)$, pois o sistema $A^T X = C$ é possível;
 (e) $\{(-1 - z, 3 - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$;
 (f) $C = (-1 - z)C_1 + (3 - 2z)C_2 + zC_3$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$, sendo C_i a coluna i de A^T ;
 (g) $C = -C_1 + 3C_2$ é a única forma de escrever C como combinação linear das colunas 1 e 2 de A^T ;
 (h) 1.^a proposta: Note que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A^T) = \{(a, b, 2a - b, -a + b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}(\tilde{A}^T) = \mathcal{L}(\tilde{A})$.
 2.^a proposta: Se $A \sim \tilde{A}$ então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\tilde{A}) = \{\alpha \tilde{L}_1^T + \beta \tilde{L}_2^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
 (i) $\mathcal{C}(A) = \{(a, b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} \neq \mathcal{C}(\tilde{A}) = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
39. Não. As matrizes A, \tilde{A} do exercício 40. servem de contraexemplo, conforme 40. (i).
40. $\mathcal{C}(A) = \{(a, b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \mathcal{L}(A) = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha - \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathcal{N}(A) = \{(-y - 2t, y, t, t) : y, t \in \mathbb{R}\},$
 $\text{car}(A) = \text{nul}(A) = 2$.
 $\mathcal{C}(B) = \mathbb{R}^2, \mathcal{L}(B) = \{(\alpha, 4\beta, 2\alpha - 7\beta, \alpha - 5\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathcal{N}(B) = \{(-2z - t, \frac{7}{4}z + \frac{5}{4}t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\},$
 $\text{car}(B) = \text{nul}(B) = 2$.
 $\mathcal{C}(C) = \mathcal{L}(C) = \{(a, b, 0, d) : a, b, d \in \mathbb{R}\}$ ou $\mathcal{L}(C) = \{(\alpha, 2\alpha + 3\beta, 0, -4\beta + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$
 $\mathcal{N}(C) = \{(0, 0, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}, \text{car}(C) = 3$ e $\text{nul}(C) = 1$.
 $\mathcal{C}(D) = \mathcal{L}(D) = \mathbb{R}^2, \mathcal{N}(D) = \{(0, 0)\}, \text{car}(D) = 2$ e $\text{nul}(D) = 0$.
41. Note que $\mathcal{C}(AB) = \{(AB)X : X \in \mathbb{R}^p\} = \{A(BX) : X \in \mathbb{R}^p\} \subseteq \{AY : Y \in \mathbb{R}^n\} = \mathcal{C}(A)$.
42. $x = 150$ e $y = 50$.
43. $x = 78, y = 38$ e $z = 18$.